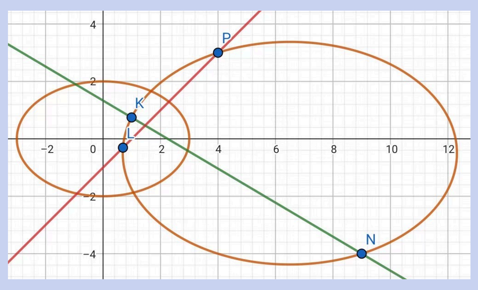


極線$Ax+By=1$と極(A,B)の反転による考察

徳島県立脇町高等学校　片岡亮太†・古澤泉

この研究では，点N，Pなどは全て原点$\mathrm{O}(0,0)$でないとする。

円に関する反転（Inversion）

●定義

単位円に関する点Pの反転を$\mathrm{P_{inv}}$とする。

$$\mathrm{P}(A,B) \quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{P_{inv}}\left(\frac{A}{A^2+B^2},\ \frac{B}{A^2+B^2}\right)$$

「$\mathrm{P_{inv}}$は半直線OP上の点で，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP_{inv}}=1$を満たす点」

●反転による図形の対応（円円対応）

原点を通る直線 $\longleftrightarrow$ 原点を通る直線

原点を通らない直線 $\longleftrightarrow$ 原点を通る円

原点を通らない円 $\longleftrightarrow$ 原点を通らない円

円に対する極線の定義及び統合

●極線の定義

円の外部の点Nから引いた2本の接線の各接点を結ぶ直線のこと。

単位円の外部の点$\mathrm{N}(A,B)$に対する極線は$\ell_N: Ax+By=1$

●$\mathrm{N}(A,B)$と$\ell_\mathrm{N}: Ax+By=1$の関係

命題1

- 任意の点$\mathrm{N}(A,B)$に対し$\ell_\mathrm{N}: Ax+By=1$の反転は直径ONの円
- 点Nの反転$\mathrm{N_{inv}}$は直線ONと直線ℓ_Nの交点

命題2

点(A,B)を任意に固定する。この点を通る平行でない2直線$\ell_1: ax+by=1$，　$\ell_2: \alpha x+\beta y=1$ を考える。

直線ℓ_1に対し点$\mathrm{N_1}(a,b)$，直線ℓ_2に対し点$\mathrm{N_2}(\alpha,\beta)$ とおくと，直線$\mathrm{N_1N_2}$の方程式は $Ax+By=1$ である。

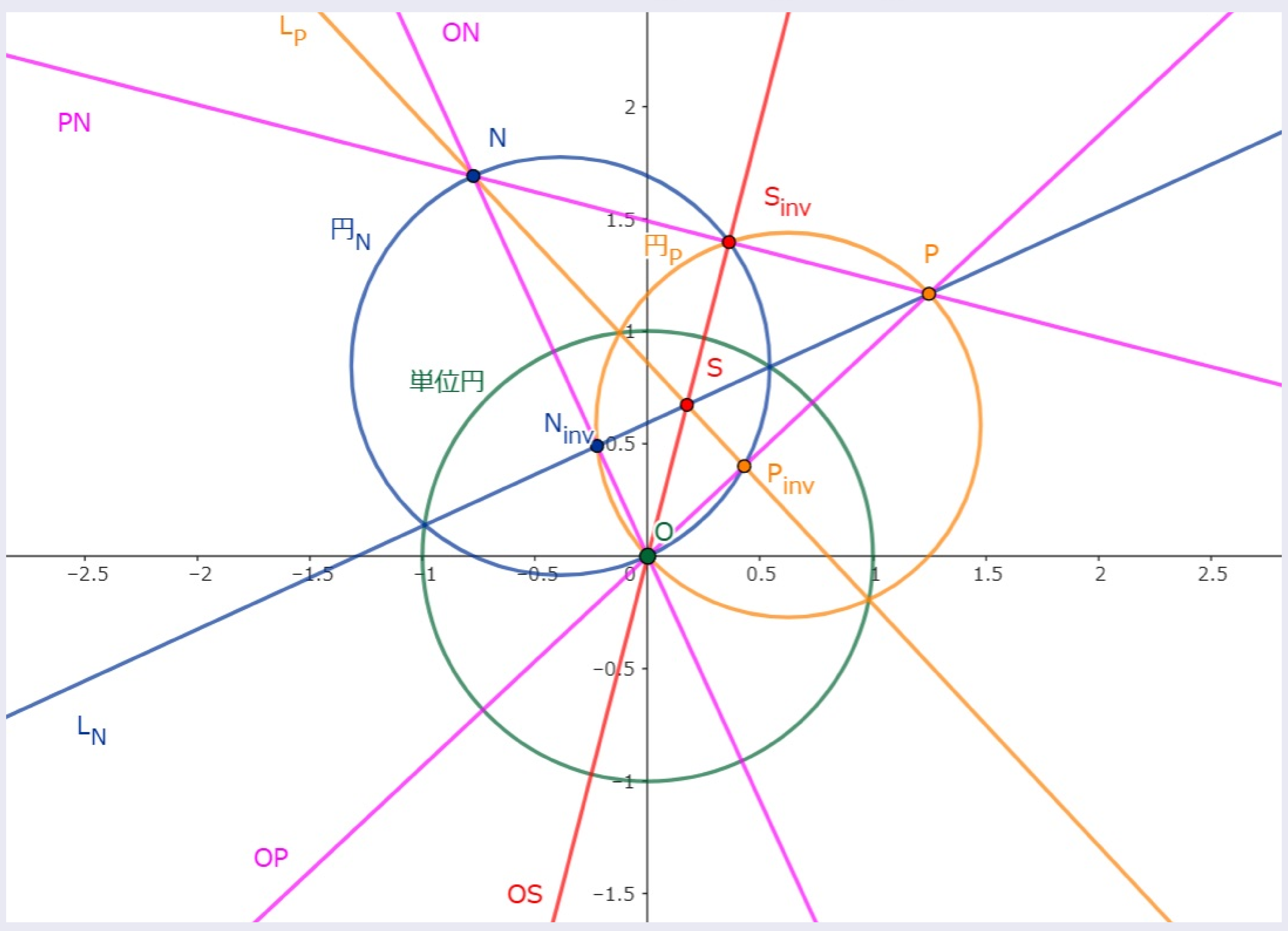
●命題2の意味

1. 点$\mathrm{N}(A,B)$が円上・円外・円内でも，その点Nを通る直線であってその方程式が“$\heartsuit x+\spadesuit y=1$”の形となる直線を引けば，係数からなる点$(\heartsuit,\spadesuit)$は直線$\ell_\mathrm{N}: Ax+By=1$上にある。
2. 接線も極線も内部の点$\mathrm{N}(A,B)$に対応する直線$\ell_N: Ax+By=1$も全て，$(x,y)=(A,B)$を解に持つ直線$\heartsuit x+\spadesuit y=1$ からなる点$(\heartsuit,\spadesuit)$ が描く軌跡として，統合することができる。
3. 問題集にある有名な問題の本質もこの命題2である。

以後任意の点$\mathrm{N}(A,B)$に対し，直線$\ell_\mathrm{N}: Ax+By=1$をNに対する極線と呼ぶ。

設定

点$\mathrm{N}(A,B)$を任意に固定し，直線$\ell_\mathrm{N}: Ax+By=1$とする。ここで，ℓ_N上に存在し，かつ直線ON上にない点を$\mathrm{P}(X,Y)$として，$Xx+Yy=1$を直線ℓ_Pとする。Pはℓ_N上の点だから$AX+BY=1$ が成立するため，Nはℓ_P上の点である。ℓ_Nとℓ_Pの交点をSとし，N，P，Sの単位円に関する反転をそれぞれ$\mathrm{N_{inv}}$，$\mathrm{P_{inv}}$，$\mathrm{S_{inv}}$とする。



主結果1（極と極線の関係）

円周角の定理を利用して，次のことが示される：

定理3

点$\mathrm{S_{inv}}$は直線OSと直線PNの交点である。

証明： 円周角の定理の逆より，点O，$\mathrm{P_{inv}}$，S，$\mathrm{N_{inv}}$は同一円上にあるので，反転の性質により，原点Oを通らず，3点P，$\mathrm{S_{inv}}$，Nを通る直線が存在し，かつ，OS，$\mathrm{OS_{inv}}$は同一の半直線である。

定理4

1. 4点O，N，$\mathrm{S_{inv}}$，$\mathrm{P_{inv}}$は直径ONの円周上にある。
2. 4点O，P，$\mathrm{S_{inv}}$，$\mathrm{N_{inv}}$は直径OPの円周上にある。
3. 4点N，S，$\mathrm{N_{inv}}$，$\mathrm{S_{inv}}$は直径NSの円周上にある。
4. 4点P，S，$\mathrm{P_{inv}}$，$\mathrm{S_{inv}}$は直径PSの円周上にある。
5. 4点N，P，$\mathrm{N_{inv}}$，$\mathrm{P_{inv}}$は直径NPの円周上にある。

定理5

点Sは△OPNの垂心である。

証明： $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$に垂直な直線$\ell_\mathrm{N}$が点Pを通り，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$に垂直な直線$\ell_\mathrm{P}$が点Nを通ることから，$\ell_\mathrm{N}$と$\ell_\mathrm{P}$の交点は△OPNの垂心である。

<u>主結果1の面白いところ</u>

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\perp\ell_\mathrm{N}$であることと，反転変換が上手く結びついてこれらの性質が成り立っている。

定理4の，4点が同一円周上にあるという性質は興味深いが，それらが単に同一円周上にあるのではなく，4点のうち反転を施す前の2点を直径とする円周上にあるということが面白い。

これまでのことを楕円に発展させる。

楕円に関する反転の定義と主結果2（楕円への拡張）

楕円$C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する点Pの反転を$\mathrm{P_{inv}}$とする。

$$\mathrm{P}(A,B) \quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{P_{inv}}\left(\frac{A}{\left(\frac{A}{a}\right)^2+\left(\frac{B}{b}\right)^2},\ \frac{B}{\left(\frac{A}{a}\right)^2+\left(\frac{B}{b}\right)^2}\right)$$

「$\mathrm{P_{inv}}$は，半直線OP上の点で，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP_{inv}}=\mathrm{OQ}^2$を満たす点」

(半直線OPと楕円Cの交点をQとする。)

定理6

1. 点$\mathrm{S_{inv}}$は直線OSと直線PNの交点である。
2. 定理4に書いてある4点を通る楕円がそれぞれ存在する。

補足： 定理5に対応する点Sは，垂心にはならない。

証明のアイデア：楕円を円に移す座標変換

xy平面上の楕円Cを，関係式$u=\dfrac{x}{a}$，$v=\dfrac{y}{b}$ でuv平面に移し，円Dとして考える。こうすることで円Dにおいて主結果1が成立する。これを逆変換$x=au$，$y=bv$ でxy平面に戻す。

$$\begin{tikzcd}
\text{楕円} \arrow[r, "\text{変換}"'] \arrow[d, dashed, "\text{楕円周角の定理?}"'] & \text{円} \arrow[d, "\text{円周角の定理}"] \\
\text{主結果2} & \text{主結果1} \arrow[l, "\text{逆変換}"']
\end{tikzcd}$$

Future work：初等幾何的手法

1. 楕円版の研究で，点Sがどのような点であるのか。
2. 座標変換によらずに初等幾何学による証明を試みたが，楕円に関する反転になると辺の長さや角度が処理できず進まなかった。楕円についても「楕円周角の定理」や「方べきの定理」が成り立たないかなどを考えてみたが難しかった。引き続き研究をしたい。

†2130023009@gs.tokushima-ec.ed.jp